

I. J. Castillioneus D<sup>no</sup>. De Montagny V. C.  
*Philosophiæ Professori in Academia Lau-*  
*zannensi, REGIÆ SOCIETATIS Londinensis*  
*Membro dignissimo, S<sup>vi</sup> Evangelii Ministro,*  
 &c. &c. S. P. D.

Read at a  
 Meeting of the  
 Royal Society,  
 on May 6.  
 1742.

NEMO ignorat Newtonianam formulam, qua *Polynomium* quodcumque, ope binomii assumpti, ad quavis potestatem extolitur; sed nemo, quod sciam, eam demonstravit. Hoc ego facere conatus meditatiunculas meas tibi æquissimo & optimo Judici mitto. *Tu, corrige, sodes, hoc dic, hocque, parum claris lucem dare coge, arguito ambigue dictum, mutanda notato.*

Continet hoc Problema tria prorsus diversa, quæ cum diversimode gignantur, & cum optima demonstratio e rei natura, vel genesi ducatur, diversa quoque probatione sunt confirmanda: Siquidem index est aut *integer*, aut *fractus*, uterque demum vel *positivus*, vel *negativus*.

1. Index sit *integer*, & *positivus*, tunc binomium ad potestatem cujus index est *m* elevare, nihil aliud est, quam toties binomium datum scribere, quoties unitas est in *m*, & omnia hæc binomia invicem ducere.

2. Si index est *fractus*, & *positivus*, binomium elevare ad potestatem  $\frac{r}{n}$  est; datum binomium elevare ad potestatem *r*, & hac potestate data, quærere quantitatem, quæ data ad potestatem *n* æquat ipsam dati binomii potestatem *r*.

N

3. Cum

3. Cum vero Index est *negativus*, five is *integer*, five *fractus*, ut binomium elevetur, facienda sunt, quæ supra N<sup>o</sup>. 1. vel 2, & deinde per inventam potestatem unitas est dividenda.

Sumo Binomium  $p + q$ , ut indicet mihi quodvis Polynomium.

Inter  $p^m$ , &  $q^m$  tot sunt medii Geometrici, in ratione  $p.q$  quot unitates in  $m - 1$ .

Hos terminos inventurus noto, quod  $p^m$  est ad  $q^m$  in ratione composita ipsius  $p^m. 1$ , &  $1.q^m$ , ut &  $p$  ad  $q$  habet rationem compositam ex  $p. 1$ , & ex  $1.q$ ; sed si fiant duæ series potestatum, in quarum altera indices ipsius  $p$  decrescant eadem proportionem arithmetica, cujus differentia est 1, qua crescunt in secunda serie indices ipsius  $q$ , habebitur series continue proportionalium in ratione  $p. 1$ , &  $1.q$ .

Sic  $p. 1 :: p^m.p^{m-1}.p^{m-2}.p^{m-3}.p^{m-4} \dots p^{m-m} = p^0 = 1$

$1.q :: 1.q. q^2. q^3. q^4. \dots q^m.$

Ergo terminis respondentibus invicem ductis

$p.q :: p^m.p^{m-1}q. p^{m-2}q^2. p^{m-3}q^3. p^{m-4}q^4 \dots q^m$

Nunc dico  $\overline{p+q}^m$  componi ex terminis supra inventis, ut facile ex genesi probatur.

Ergo omnes termini, qui sunt in  $\overline{p+q}^m$  ordine dispositi sunt in proportionem continuam.

Et quidem duo quivis sese immediate sequentes sunt, ut primus binomialis radice terminus ad secundum.

Quod patet ex genesi, nam  $p$  aliquoties ductum est ad  $q$  toties ductum in  $p$ , ut  $p.q$ .

Igitur omnium numerus est  $m + 1$ ; sed & in serie arithmetica decrescente  $m.m - 1.m - 2. \dots 0 -$  termini sunt numero  $m + 1$ , aut crescente  $0. 1. 2. 3.$

$\dots m;$

. . . . .  $m$ ; ergo termini componentes  $\overline{p+q}^m$  debent habere indices hos, aut esse  $p^m. p^{m-1}q. . . . . q^m$ .

Atqui ex legibus multiplicationis numerus terminorum debet esse  $2^m > m + 1$ , ergo in hoc facto aliqui termini repetiti debent inveniri.

Vulgaria facta (ea, nempe, quorum multiplicans & multiplicandum constat quantitatibus diversis) omnes continent diversos terminos, quia omnes formantur diversis factoribus. In potestatibus ergo dispendendum quinam termini diversi essent, nisi factores semper essent iidem, & quot ex diversis restitutione literarum æquales fiant; sic enim reperiemus quoties quisque in potestate repeti debeat.

Jam patet, quod si factores semper essent diversi, diversi quoque essent omnes termini in producto.

Quod cum primus in producto non fiat nisi ex primis multiplicantium, & ultimus illius ex horum ultimis, semper hæc facta erunt diversa, quamvis binomia facientia sint eadem, quia primus binomii terminus differt a secundo.

Quod ex cæteris aliqui possunt fieri æquales, quia constanter ex primis facientium ductis in secundos, & diversimode junctis.

Igitur quærendum est, quot diversis modis jungi possint quantitates, quarum numerus datus est.

In casu nostro index rerum est  $m$ , res diversæ duæ, quarum una repetitur vicibus  $s$ , altera  $t$ , ita ut  $s + t = m$ ; ergo numerus permutationum erit

$$\frac{m.m-1.m-2.m-3 \dots 1}{s.s-1.s-2 \dots 1.t.t-1.t-2.t-3 \dots 1}$$

Sic sit  $t=1, s=m-1$ , terminus erit  $p^{m-1}q$ , & ejus

$$\text{coefficientis } \frac{m.m-1.m-2.m-3 \dots 1}{m-1.m-2.m-3 \dots 1} = m.$$

Sit  $t=3, s=m-3$ ; habebitur coefficientis ipsius  

$$p^{m-3}q^3, = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \cdot \dots \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot m-3 \cdot m-4 \cdot m-5 \cdot \dots \cdot 1} =$$
  

$$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \text{ \& sic de cæteris.}$$

Si quis forte dubitet, an superior demonstratio  
 evincat omnes terminos necessario formari tot modis,  
 quibus possunt, & contendat eam tantum ostendere id  
 accidere posse, hoc responsi ferat.

Certe  $\overline{p+q}^m = \overline{p+q} \times \overline{p+q}^{m-1}$ ; sed inter hujus  
 terminos sunt  $p^{m-n-1}q^n$ , &  $p^{m-n}q^{n-1}$ , quæ necessario  
 ducentur in  $p$  &  $q$ , &  $p^{m-n-1}q^n \times p = p^{m-n}q^n =$   
 $p^{m-n}q^{n-1} \times q$ , ergo  $p^{m-n}q^n$  omnibus modis possibilibus  
 factum erit in  $\overline{p+q}^m$ , si  $p^{m-n-1}q^n$  &  $p^{m-n}q^{n-1}$  sint ge-  
 nita quot modis possunt in  $\overline{p+q}^{m-1}$ ; quod necessario  
 crit, si  $p^{m-n-2}q^n$ , &  $p^{m-n}q^{n-2}$  sint in inferiori potestate  
 $\overline{p+q}^{m-2}$ , & sic semper usque ad quadratum in quo  
 $pp, pq$ , &  $qq$  habentur, efficta tot quot possunt mo-  
 dis (4. II. *Euclid.*) ergo & in superioribus.

Hoc ratiocinium monet, ut idem etiam sic osten-  
 dam, ratione paulo diversa.

Jam primi coefficientem esse unitatem demonstra-  
 vimus.

Secundus terminus  $p^{m-1}q$  conficitur ex  $p^{m-2}q \times p$ ,  
 &  $p^{m-1} \times q$ , id est, ex primo radice in secundum ipsius  
 $\overline{p+q}^{m-1}$ , & ex secundo radice in primum  $\overline{p+q}^{m-1}$ ,  
 ergo in  $\overline{p+q}^m$  adest  $p^{m-1}q$  semel, plus toties, quoties  
 secundus est in  $\overline{p+q}^{m-1}$ , qui ibi est semel, plus toties,  
 quoties secundus in  $\overline{p+q}^{m-2}$ , qui rursus ibi est semel  
 plus

plus toties, quoties secundus est in  $\overline{p+q}^{m-2}$ , & sic semper donec deveniatur ad  $\overline{p+q}^{m-m}$ , ubi semel est secundus; ergo quærenda est summa tot unitatum, quot sunt in  $m$ , quæ est  $m$ .

Item tertius  $p^{m-2}qq$  conficitur ex  $p^{m-3}qq \times p$ , tertio  $\overline{p+q}^{m-1}$  in primum radicis, & ex  $p^{m-2}q \times q$  secundo ipsius  $\overline{p+q}^{m-1}$  in secundum radicis; ergo  $\overline{p+q}^m$  continebit  $p^{m-2}qq$  quoties secundus continetur in  $\overline{p+q}^{m-1}$ , id est,  $m-1$  vices, plus toties quoties ibidem astat tertius, id est, quoties secundus est in  $\overline{p+q}^{m-2}$  ( $m-2$ ) plus quoties ibi est tertius, qui rursus est quoties secundus est in  $\overline{p+q}^{m-3}$  ( $m-3$ ) plus quoties ibi est tertius, atque ita porro donec perveniamus ad  $\overline{p+q}^2$  ubi semel est tertius, aut ad  $p+q$ , ubi tertius nullus est; nam semper quærenda est summa progressionis arithmeticæ  $m-1.m-2.m-3. . . . . 1$ , aut  $m-1.m-2. . . . . 0$ , in illa numerus terminorum est  $m-1$ , in hac  $m$ , ut patet; quare hæc summa  $= \overline{m-1+1} \times \frac{m-1}{2} = m \times \frac{m-1}{2} = \overline{m-1+0} \times \frac{m}{2}$ .

Eodem pacto coefficientes reliquorum terminorum probabuntur efficere seriem in qua secundæ differentiæ sunt in progressionem arithmetica, &c.

Unde semper, ubi  $m$  est integer, & positivus, formula erit

$$p^m + m p^{m-1} q + \frac{m.m-1}{2} p^{m-2} q q + \frac{m.m-1.m-2}{2.3} p^{m-3} q^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4} p^{m-4} q^4 - \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{2.3.4.5} p^{m-5} q^5, \text{ \&c.}$$

Si fiat  $p+q=\overline{p \times 1 + \frac{q}{p}}$ , hinc orietur ipsissima New:  
toni formula; nam  $\overline{p+q}^m = \overline{p^m \times 1 + \frac{q}{p}}^m =$

$$p^m \times 1 + \frac{m}{1} \times \frac{p}{q} + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} \times \frac{p^2}{q^2} + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times \frac{p^3}{q^3}, \text{ \&c.} =$$

(si  $A, B, C, D, \text{ \&c.}$  ponantur æquare primum, secundum, tertium, quartum,  $\text{ \&c.}$  cum suis quemque coefficientibus)

$$p^m \times 1 + mA \frac{q}{p} + \frac{m-1}{2} B \frac{q^2}{p^2} + \frac{m-2}{3} C \frac{q^3}{p^3} \\ + \frac{m-3}{4} D \frac{q^4}{p^4} + \frac{m-4}{5} E \frac{q^5}{p^5} + \frac{m-5}{6} F \frac{q^6}{p^6}, \text{ \&c.}$$

Quæramus nunc formulam elevandi ejusdem binomii ad potestatem  $\frac{r}{n}$ , ubi  $r$  &  $n$  sunt numeri integri, & ambo vel positivi, vel negativi.

Jam  $p \cdot q : p^{\frac{r}{n}} \cdot x = \frac{p^{\frac{r}{n}} q}{p} = p^{\frac{r}{n}-1} q$ , quare termini erunt  
 $p^{\frac{r}{n}} \cdot p^{\frac{r}{n}-1} q \cdot p^{\frac{r}{n}-2} q q \cdot p^{\frac{r}{n}-3} q^3, \text{ \&c.}$

Coefficientes inveniendi sint  $A, B, C, D, E$ , ita ut  
totâ  $\overline{p+q}^{\frac{r}{n}}$  radix  $= A p^{\frac{r}{n}} + B p^{\frac{r}{n}-1} q + C p^{\frac{r}{n}-2} q q +$   
 $D p^{\frac{r}{n}-3} q^3 + E p^{\frac{r}{n}-4} q^4, \text{ \&c.}$  ergo  $\overline{p+q}^r (p^r + r p^{r-1} q +$   
 $\frac{r \cdot r-1}{2} p^{r-2} q q + \frac{r \cdot r-1 \cdot r-2}{2 \cdot 3} p^{r-3} q^3, \text{ \&c.}) = A p^{\frac{r}{n}} +$   
 $\overline{B p^{\frac{r}{n}-1} q + C p^{\frac{r}{n}-2} q q, \text{ \&c.}}^n = A^n p^r + n A^{n-1} B p^{r-1} q +$   
 $n A^{n-1} C p^{r-2} q q + n A^{n-1} D p^{r-3} q^3 + n A^{n-1} E p^{r-4} q^4 \text{ \&c.}$   
 $+ n \cdot n -$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{n \cdot n - 1}{2} A^{n-2} B^2 p^{r-2} q q + n \cdot n - 1 A^{n-2} B C p^{r-3} q^3 + \\
 & n \cdot n - 1 A^{n-2} B D p^{r-4} q^4 \& c. + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{2 \cdot 3} A^{n-3} B^3 p^{r-3} q^3 \\
 & + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{2} A^{n-3} B^2 C p^{r-4} q^4 \& c. + \\
 & \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3}{2 \cdot 3 \cdot 4} A^{n-4} B^4 p^{r-4} q^4. \text{ Atque ideo collatis} \\
 & \text{terminis } 1 = A^n = A^{n-1} = A^{n-2} \& c. nB = r, \& B = \frac{r}{n}, \\
 & nC + \frac{n \cdot n - 2}{2} \times \frac{rr}{nn} = \frac{r \cdot r - 1}{2}, \& C = \frac{r \cdot r - n}{2 \cdot nn}, nD + \\
 & n \cdot n - 1 \times \frac{r}{n} \times \frac{r \cdot r - n}{2nn} + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{2 \cdot 3} \times \frac{r^3}{n^3} = \frac{r \cdot r - 1 \cdot r - 2}{2 \cdot 3}, \& \\
 & D = \frac{r \cdot r - n \cdot r - 2n}{2 \cdot 3 \cdot n^3} \& c.
 \end{aligned}$$

Si ergo faciamus  $\frac{r}{n} = m$ , & primum terminum  $A$ ,  
 $\& c.$  revivet prior formula, &  $\overline{p+q}^{\frac{r}{n}} = \overline{p+q}^m = p^m \times$   
 $1 + m A \frac{q}{p} + \frac{m-1}{2} B \frac{p}{q} + \frac{m-2}{3} C \frac{q}{p} \& c.$

Extollendum fit binomium  $p+q$  ad negativam potestatem, seu perfectam, seu imperfectam— $s$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Jam } \overline{p+q}^{-s} &= \frac{1}{p+q} = \frac{1}{p^s + s p^{s-1} q + \frac{s \cdot s - 1}{2} p^{s-2} q q \& c.} \\
 &= (\text{per divisionem}) \frac{1}{p} - \frac{s p^{s-1} q}{p^{2s}} - \frac{s \cdot s - 1}{2} \times \frac{p^{s-2} q q}{p^{2s}}
 \end{aligned}$$

$$\frac{s.s-1.s-2}{2.3} \times \frac{p^{s-3}q^3}{p^{2s}} - \frac{s.s-1.s-2.s-3}{2.3.4} \times \frac{p^{s-4}q^4}{p^{2s}} =$$

$$p^{s-1} - sp^{s-2}q - \frac{s.s-1}{2} p^{s-2}qq.$$

Ex hac formula facile, superiorum vestigiis infistendo, eruitur solemnis & generalissima  $p^m \times 1 + mA \frac{q}{p} + \frac{m-1}{2} B \frac{q}{p} \&c.$

Non injucundum puto, quod in hac formula, si  $m=-2$ , coefficientes erunt numeri naturales, si  $m=-3$ , trigonales, pyramidales, si  $m=-4$  &c.

Cæterum constat hanc formulam semper dare seriem infinitam; siquidem (si  $m$  exponit numerum positivum) ultimus terminus esse deberet  $q^{-m}$ ; sed  $p.q :: p^{-m}.p^{-m-1} :: p^{-m-1}q.p^{-m-2}qq, \&c.$  ergo ratio ipsius  $p^{-m}.q^{-m}$  componi deberet ex aliquibus rationibus  $p.q$ , quod fieri nequit, quia  $p^{-m}.q^{-m} :: \frac{1}{p^m} \cdot \frac{1}{q^m} :: q^m.p^m$  in ratione composita ex reciprocis ipsius  $p.q$ .

Quod & aliter demonstratur, indices ipsius  $p$  faciunt progressionem arithmeticam, cujus termini  $-m, -m-1, -m-2, \&c.$  negativi quidem sunt, sed crescunt, aut ab 3 recedunt; atqui ultimus terminus debet esse  $q^{-m} = p^0 q^{-m}$ , ergo nunquam ad illud devenietur.

Viviaci,  
postridie Id. Septemb.  
C10 DCCCXXXI.